

ファクターモデル

Gaillac & L'Hour (2025, Section 2.6)

松村 泰行 (京都大学経済学研究科・博士後期課程1年)

✉ matsumura.yasuyuki.w85@kyoto-u.jp

🌐 <https://yasu0704xx.github.io>

最終更新：2026 年 7 月 14 日

ファクターモデル

主成分分析推定量・漸近理論

ファクターの数の選び方

動学ファクターモデル

交互作用効果モデル

因果推論への応用

- Hansen (2022, Sections 11.10 – 11.16)
- 時系列・パネルの教科書：Pesaran (2015, Chapter 29); Hsiao (2022, Chapter 10)
- レビュー論文：Ditzen and Karavias (2025); Pionati (2025)
- 日本語で読めるレビュー論文：奥井 (2014); 早川 (2014)
- 本スライドの作成に際して、上記の文献以外に、奥井先生の講義スライドと末石先生の講義スライドを参照しています。

ファクターモデル

- **ファクターモデル**とは、多くの変数あるいは多くの観測個体の分布の重要な部分（特徴）を、少ない数の要素・要因によって記述できると仮定するモデルである。
- 古くは、主成分分析や因子分析などの多変量解析の分野で使用されてきた。
- 因子分析については、たとえば、丸山 (2024) に詳しい。
- 近年は、経済学でのファクターモデルの応用が進んでいる。
- Stock and Watson (1999) は、インフレ率の予測のため失業率や資本稼働率などの経済指標を表す多くの変数にファクター構造を仮定した、著名な研究である。

- データとして y_{it} ($i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$) を観測しているものとする。
- N も T も大きい場合を考える。
- たとえば、横断面も時系列も長いパネルデータが利用できる場合や、多くの変数の多くの観測値が得られる場合などを想定している。
- 説明の便宜上、 i は横断面の index, t は時系列の index であると考える。

- モデル

$$y_{it} = \underbrace{\lambda_i^\top}_{1 \times r} \underbrace{F_t}_{r \times 1} + w_{it}$$

- F_t ($r \times 1$) は**共通因子 (factor)** である。共通因子は、時間と共に変化するが、すべての観測個体に共通する (i に依存しない)。
- λ_i ($r \times 1$) は**因子負荷 (factor loading)** である。因子負荷は、時点を通じても変化しない (t に依存しない) が、観測個体ごとに異なる。
- 共通因子の次元 r は小さいと仮定する。通常の応用では 1 から 5 程度である。
- 解釈：すべての観測個体は同じ共通因子 F_t から影響を受けるが、その影響の度合い λ_i は観測個体ごとに異なる。

誤差項の相関構造

- 誤差項 w_{it} の相関構造に関する仮定は比較的緩やかでよい。
 - **厳密なファクターモデル (exact factor model)** とは、誤差項どうしが横断面では相関しない ($i \neq j$ ならば w_{it} と w_{jt} は無相関である) とするモデルである。
 - **近似的なファクターモデル (approximate factor model)** とは、誤差項どうしが横断面で弱く相関することを許すモデルである。
 - 通常のファクターモデルでは、系列相関は許される。
-
- 横断面の相関にしても、系列相関にしても、**弱い相関のみ**が許されている。
 - もし y_{it} に強い相関構造があったとしても、その強い相関は共通因子の部分で表現されていて、 w_{it} には弱い相関しか残らないというモデル（仮定）である。
-
- 後に紹介する主成分分析推定量について、その有効性は、誤差項 w_{it} が横断面方向にも時系列方向にも iid であることを要求する。

- 行列 $\underbrace{Y}_{T \times N}$, $\underbrace{\Lambda}_{N \times r}$, $\underbrace{F}_{T \times r}$, $\underbrace{W}_{T \times N}$, をそれぞれ,

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{N1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1T} & \cdots & y_{NT} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^\top \\ \vdots \\ \lambda_N^\top \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1^\top \\ \vdots \\ F_T^\top \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{N1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1T} & \cdots & w_{NT} \end{pmatrix}$$

によって定義すると、ファクターモデルは

$$Y = F\Lambda^\top + W \tag{1}$$

と表される。

- 追加的な条件なしでは、(1) を満たす F と Λ は一意に定まらない。
- 任意の正則行列 $\underbrace{A}_{r \times r}$ をとって $F^* = FA$ かつ $\Lambda^* = \Lambda A^{\top -1}$ としても、

$$F^* \Lambda^{*\top} = F A A^{-1} \Lambda^{\top} = F \Lambda^{\top}$$

となり、観測上同値なモデルを得ることができてしまう。

- よく使われる識別条件は、

$$\frac{F^{\top} F}{T} = I_r \quad \text{かつ} \quad \Lambda^{\top} \Lambda \text{ が対角行列}$$

というものである。これは、主成分分析による推定と整合的である。

- 共通因子の張る線形空間の識別はできるため、共通因子そのものの識別がそれほど深刻な問題とならない応用例も多い。
- 例：共通因子追加回帰 (factor augmented regression)
- Bai and Ng (2006), Stock and Watson (2002), Bernanke et al. (2005)
- 共通因子の値そのものには興味はなく、 $\lambda_i^\top F_t$ の値に興味がある場合もある。
- 例：データから強い相関をもたらす部分を取り除くことが目的である場合
- 後述する**交互作用効果モデル** (Bai, 2009; Pesaran, 2006) もこの類である。
- このような場合には、共通因子の識別問題はそれほど深刻な問題ではなく、識別条件を推定のための便宜的なものとみなしても構わないように思う。

識別問題：少し立ち入った話 (Bai and Ng, 2013, p.19)

- Bai and Ng (2013) はどの識別条件を採用するかによって、因子や因子負荷の推定量の漸近分布が異なることを示している。

Identifying restrictions:		
	Restrictions on F	Restrictions on Λ
(2.1): PC1	$\frac{1}{T}F'F = I_r$	$\Lambda' \Lambda$ is a diagonal matrix with distinct entries
(2.2): PC2	$\frac{1}{T}F'F = I_r$	$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}$, $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \cdots & \lambda_{rr} \end{pmatrix}$, $\lambda_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, r$
(2.3): PC3	Unrestricted	$\Lambda = \begin{pmatrix} I_r \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}$

- 共通因子追加回帰の場合、観測される変数の係数の漸近分布は影響を受けない。

主成分分析推定量・漸近理論

近年の計量経済学では、主成分分析法 (principal component analysis) が因子モデルの代表的な推定法である。主成分分析法 (principal component method) による共通因子や因子負荷の推定量の一致性 (consistency), 漸近正規性 (asymptotic normality) といった基礎的な漸近的性質は、今世紀の計量経済学の研究によって明らかにされた。¹⁾しかし、従来の統計理論においては、因子分析と主成分分析は似て非なるものと位置づけられ、その違いを強調している教科書も多く、因子分析に主成分分析を当てはめる近年の計量経済学の手法に違和感を覚える読者がいるかもしれない。この点についても、データ環境の変化にその原因を見出すことができる。変数の数が多い場合には、従来の因子分析の手法を使用することが計算上難しくなるため、計算負荷がより低い主成分分析法が魅力的である。さらに、変数の数も観測個体の数も多い場合には、主成分分析法を因子モデルの推定法として理論的に正当化できることが、本稿で紹介する研究成果によって、明らかになった。これらの要因から、主成分分析法が経済学での因子モデルの標準的な手法になったと考えられる。

主成分分析法によるファクターモデルの推定

- 基本的なアイデアは最小二乗法 (OLS) と同じである。解きたい最小化問題は

$$\min_{\lambda_1, \dots, \lambda_N, F_1, \dots, F_T} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \lambda_i^\top F_t \right)^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F_t F_t^\top = I_r$$

である。この最小化問題の解は、

$$\underbrace{\tilde{F}}_{T \times r} = \left(\underbrace{Y Y^\top}_{T \times T} \text{ の上位 } r \text{ 個の固有値に対応する固有ベクトル} \right)$$
$$\underbrace{\tilde{\Lambda}^\top}_{r \times T} = \frac{\tilde{F}^\top Y}{T}$$

で、**主成分分析** (principal component analysis, **PCA**) の計算と同じになる。

- 計算手続きは、たとえば教科書 pp.31–32 や奥井 (2014, pp.254–256) を参照されたい。識別条件のもとで $\text{tr}(F^\top Y Y^\top F)$ を最大化する問題と同値になる。

主成分分析法：理論保証

- PCA 推定量は、 N も T も無限に行く二重漸近理論のもとで、一貫性を持ち (Stock and Watson, 2002), 漸近正規である (Bai, 2003)。
- 理論的な注意点：**推定する母数 F_t や λ_i は無限次元の母数の一部**であるので、通常の極値推定量をそのまま適用することはできない。
- Bai (2003) は、ファクターに関するいくつかの条件の下で、弱い相関・不均一分散を横断面と時系列の両方向に許容したうえで、

$\sqrt{N}/T \rightarrow 0$ のとき、ある正則な行列 H が存在して、

$$\text{各 } t \text{ について, } \sqrt{N} \left(\hat{F}_t - H F_t \right) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, V_t)$$

であることを示している。

- H という行列が必要なのは、「共通因子そのものの識別は不可能だが、共通因子の張る空間は識別可能である」ことを反映している。

- 共通因子・因子負荷の PCA 推定量は、誤差項 w_{it} が横断面と時系列のどちらの方向にも iid で正規分布に従う場合に有効である (Iwakura and Okui, 2014)。
- 系列相関があったとしても横断面方向に iid であれば、共通因子の PCA 推定量 $\hat{F}_t$ は有効となる。しかし、因子負荷の PCA 推定量 $\hat{\lambda}_i$ は有効でなくなる。
- 不均一分散や横断面方向の相関がある場合には、PCA 推定量は有効でなくなる。
- 効率性を上げる方法として、OLS を拡張して GLS にすることが考えられる。
- GLS や最尤法に基づく方法については、奥井 (2014, p.256) や早川 (2014, p.278) の文献紹介を参照されたい。

ファクターの数の選び方

- Bai and Ng (2002) は共通因子の数を r として

$$PC(r) = \min_{\lambda_i, F_t} \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - \lambda_i^\top F_t \right)^2 + rg(N, T),$$
$$g(N, T) = \text{var}(w_{it}) \frac{N+T}{NT} \ln \left(\frac{N+T}{NT} \right)$$

を最小にする r を選ぶことを提案した。

- 第1項はPCA推定量 (OLS) の目的関数と同じで, r を増やすと小さくなる。
- 第2項は罰則項で, r を増やすと大きくなる。
- 一定の条件の下で一致性 (変数選択の一致性) を持つ。しかし, 実証分析ではかなり大きい数を選んでしまうことが多いようである。
- 実は, 彼らの情報量基準では, $Y^\top Y/NT$ の固有値の大きさをもとに共通因子を決めていることになっている。奥井 (2014, pp,257-258) を参照されたい。

固有値の減衰度合い

- $Y^T Y / NT$ の固有値の特徴は、真の因子の数を境目に急激に減衰することである。
 - 固有値そのものの大きさでなく、**隣接固有値の差や比**をもとにした方法がある。
 - Onatski (2010) は隣接固有値の差が最大になるような選び方を提案している。
 - Ahn and Horenstein (2013) は2種類の検定 (ER, GR) を提案しているが、どちらも隣接固有値の比に基づく方法である。
-
- T が有限の場合の共通因子の数の決め方は、ファクターモデルの文脈以外に、古典的な主成分分析における主成分の数の選択方法として議論がなされている。
 - 誤差項に正規性の仮定を要求する方法が多いが、実は分布形の仮定を外すのは簡単ではない (Hallin, Paindaveine and Verdebout, 2010)。
 - 多重検定問題を考慮する必要もある (Perry et al., 2025) ため、理論的にすっきりしている方法はまだないように思われる。

Spearman 相関行列を用いる方法 (Qiu, Li and Yao, 2024)

- 固有値の減衰度合いに基づく方法では「弱い」共通因子を検出できない可能性がある。特に、外れ値がある場合や裾の重い分布の場合はその可能性が高くなる。
- Qiu, Li and Yao (2024) は、共分散行列の代わりに **Spearman 相関行列** を用いて共通因子の数を推定する方法を提案している。
- 理論保証は、 $N, T \rightarrow \infty$ かつ $T/N \rightarrow c \in (0, \infty)$ の設定で、混合正規分布（2 次モーメントは有界でなくてもよい）を仮定している。また、系列相関はないという設定である。テクニカルには、ランダム行列理論と U 統計量の議論を用いる。
- 数値実験によると、裾の重い分布の場合でも N, T をある程度増やせば正しい共通因子の数を選択できるらしい（裾の軽い分布ならば既存手法と同程度の性能）。 N, T が小さいときには性能が落ちる。

- 構造変化が 1 回起こるモデルを考える。

$$y_{it} = 1\{t \leq T_1\} \lambda_i^\top F_t + 1\{t > T_1\} \bar{\lambda}_i^\top F_t + w_{it}$$

- 因子負荷の値が，時点 T_1 の前後で変化する。
- 共通因子は F_t であるのだが， $1\{t \leq T_1\} F_t$ と $1\{t > T_1\} F_t$ を別の共通因子と認識してしまうと，共通因子の数が見かけ上 2 倍になる。

共通因子の数が見かけ上多い場合：共通因子の影響がブロック構造を持つケース

- 共通因子は実際に多く存在しているが、各観測変数は少数の共通因子からしか影響を受けていないようなケースを考える。
- 例：国レベルのパネルデータの分析
- 共通因子の中には、世界中の国に影響を与えるものと、特定の国や地域にだけ影響を与えるものがあるだろう。例えば、日本経済に影響を及ぼす共通因子の中には、世界経済に影響するものと、アジア経済に影響するものがあるだろう。
- 世界には多くの国・地域があるため、共通因子全体の数は大きくなる。
- このような場合でも、各変数に関する共通因子は少ないため、ファクターモデルの利点を生かすことは可能である。

動学ファクターモデル

- ファクターのラグが入るモデルも、計量経済学の応用上は重要である。

$$y_{it} = \sum_{s=0}^p \lambda_i^{(s)\top} F_{t-s} + w_{it}$$

- 共通因子の過去の値も現時点で観測できる変数の値に影響を与えるという意味で、動学的なモデルである。
- 主成分分析法をそのまま適用するのは難しい。主成分分析法の識別条件 $F^\top F/T = I_r$ は共通因子に系列相関がないことを意味するので、 F_t と F_{t-1} は異なる共通因子であると解釈するような力技は不適切である。
- 動学ファクターモデルに対しては、上記の時間領域での表現を周波数領域での表現に書き換えたうえで主成分分析を行うと、共通因子の推定が簡便になる。
- 共通因子の決め方：Amengual and Watson (2007), Hallin and Liska (2007), Bai and Ng (2007), Breitung and Pigorsch (2013)

大規模ファクターモデルの推定は基本的に主成分分析に基づいて行われる。Stock and Watson (2002) (以下, SW), Bai (2003) は時間領域での主成分分析を提案し, Forni *et al.* (2000, 2004, 2005) (以下, FHLR) は周波数領域での主成分分析を提案している。時間領域の主成分分析はデータの共分散行列の固有ベクトルを計算するだけであるため, 計算は非常に簡単である。一方, 周波数領域の主成分分析はスペクトル密度の推定などが必要になるため, 計算の負荷が大きい, 特定の周期の成分を抽出したりすることが可能である為, 応用性は高い。時間領域と周波数領域の主成分分析のどちらが優れているかははっきりしていない。また, 主成分分析の代替的な方法として Kapetanios and Marcellino (2009) は sub space アルゴリズムを利用した推定方法を提案している。この方法はモデルをパラメトリックに状態空間表現する必要があるという点で若干制約的であるが, Kapetanios and Marcellino (2009) はシミュレーションで時間領域・周波数領域の主成分分析と同じようなパフォーマンスを持つことを示している。一方, Doz *et al.* (2012) は N が小さい場合に良く用いられる最尤推定量について考察しており, 最尤法によって推定されたファクターは $N \rightarrow \infty$ のときに一致性を持つことを示している。

因子モデルを用いた景気指標の作成も、動学的因子モデルを用いて行われることが多い。例えば、ヨーロッパの景気指標として Euro-coin という指標が The Center for Economic Policy Research (CEPR) から発表されている。⁶⁾ アメリカの景気指標としては、CFNAI という指標をシカゴ連邦準備銀行が発表している。⁷⁾ 日本の景気指標も、ヨーロッパやアメリカのものにならって早川・小林 (2011) が作成している。

⁶⁾ eurocoin.cepr.org を参照。

⁷⁾ www.chicagofed.org/webpages/publications/cfnai を参照。

交互作用効果モデル

線形回帰モデルへの応用：交互作用効果モデル (Bai, 2009)

- 個人効果 λ_i と時間効果 F_t が交互作用をもっている場合を考える。

$$y_{it} = x_{it}^\top \beta + \lambda_i^\top F_t + w_{it}$$

- かなり広範囲の欠落変数の影響を取り除くのに有用であると考えられている。
- 横断面方向 and/or 時系列方向の相関を表現するモデルとしても有用である。

- Bai (2009) は最小化問題

$$\min_{\beta, \Lambda, F} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(y_{it} - x_{it}^\top \beta - \lambda_i^\top F_t \right)^2 \quad \text{s.t.} \quad FF^\top / T = I, \Lambda^\top \Lambda \text{は対角行列}$$

に対して、主成分分析法と最小二乗法を繰り返す推定アルゴリズムを提案した。

- 漸近的にもバイアスが残るので、バイアス修正推定量を考えるべきである。たとえば、Moon and Weidner (2017), Armstrong, Weidner and Zeleneev (2026+) を参照されたい。

- Pesaran (2006) はファクターを推定するのではなく、ファクターの代理変数として $(\bar{y}_t, \bar{x}_t)$ を用いる方法を提案した (common correlated effects, CCE)。
- 理論保証のための条件は強いが、実装が簡単なのでよく用いられる。
- QMLE (Bai and Li, 2012; Bai, 2025)
- 操作変数推定 (Norkutė, Sarafidis, Yamagata and Cui, 2021)
- 核ノルム正則化推定量 (Moon and Weidner, 2025)

特殊ケース：グループ固定効果モデル (Grouped Fixed Effects Model)

- 次のような、切片が個人ごとにも時間を通じて異なるモデルを考える。

$$y_{it} = x_{it}^{\top} \beta + \alpha_{g_i t} + v_{it}$$

ただし、すべての個人が異なる切片を持つわけではなく、各個人が G 個あるグループのどれかに属し、グループ内では同じ切片を共有するモデルである。

- このモデルを

$$\lambda_i = (1(g_i = 1), \dots, 1(g_i = G))^{\top}, \quad F_t = (\alpha_{1t}, \dots, \alpha_{Gt})$$

と書き換えると、交互作用効果モデルの特殊ケースであることがわかる。

- 代表的な文献は Bonhomme and Manresa (2015), Su, Shi and Phillips (2016), Bonhomme, Lamadon and Manresa (2022) である。
- K -means 法や Classifier LASSO 等を使ってグループメンバーシップを推定する。

因果推論への応用

因果推論におけるファクターモデルの活用

- 合成コントロール法：Abadie and Gardeazabal (2003)
- 日本語の教科書では、たとえば、川口・澤田 (2024) の第 9.5 節に詳しい。
- 合成コントロール法以外にも、ファクターモデルを活用した因果推論の手法が考案されている。レビュー：Arkhangelsky and Imbens (2024)
- Cardoso, Ferman, and Fernandes (2026) によると、処置効果の異質性がファクター構造をもつとき、交互作用効果推定量は ATT に対する一致性を失う。
- 原因は、交互作用効果推定量が処置効果の一部までファクターとして吸収してしまうことである (control for too much)。
- Bai and Wang (2026) は、処置・未処置の潜在アウトカムにファクターモデルを仮定したうえで、実際に識別可能な推定対象を再定義している。
- 彼らの設定では、処置を「因子負荷に対する構造変化」と解釈することになる。